高寒草甸牧场最优放牧强度的研究*

Ⅱ. 轮牧草场放牧强度的最佳配置

周　立　王启基　赵　京
(中国科学院西北高原生物研究所)
周　琪
(吉林市职工大学)

摘　要

对于实行轮牧制度的牧场，本文建立了各轮牧草场放牧强度最佳配置的数学模型，证明该非线性无约束最优化问题解的存在和唯一性。提供了优化方法并给出解的解析表达式。最后，将上述结果应用于实行两季草场轮牧制的高寒草甸牧场，确定其年度最大藏羊生产力的两季草场放牧强度配置。讨论了各轮牧草场放牧强度最佳匹配准则。本文提供的理论、方法不仅解决了轮牧牧场放牧强度优化匹配问题，而且也为轮牧草地的放牧强度组合试验设计指出一条新的途径。

关键词：轮牧牧场；放牧强度最佳配置；非线性无约束最优化模型；解的存在和唯一性；高寒草甸牧场

出于提高生产力或草地生态系统稳定性和恢复力考虑，或者为了充分利用牧草资源，轮牧方式广泛地被世界各地的牧场所采用。在广布于青藏高原的高寒草甸天然牧场，受地理、气候条件的限制，于长期的畜牧业生产实践中形成了两季草场轮牧制度和轮牧时间分配。对于轮牧牧场，如何配置各轮牧草地的放牧强度，使得年度家畜生产力或经济效益达到最大?这是一个尚未引起人们充分注意的问题。受人力、财力和时间的限制，人们不可能对轮牧草地的各种放牧强度组合全部进行试验。通常，在进行轮牧试验设计时，只能有几组离散的轮牧草地放牧强度配置被考虑。因此，这样试验一般得不到最优组合。即使偶然得到，人们也无法判断它是否是无穷多组合中的最优者。若采用统计回归方法处理试验数据，受特定组合关系的限制，也难以获得任意组合中的最优者。换言之，通过直接组合试验方法，几乎不可能解决轮牧草场的放牧强度最佳配置问题。

* 国家自然科学基金和中国科学院海北高寒草甸生态系统定位站基金资助项目。

本文建立一种理论方法，只须独立地确定各轮牧草地的家畜生产力-放牧强度关系，不经组合试验即可获得各轮牧草地放牧强度的最佳配置。并且作为实例，将其应用于高寒草甸轮牧草场，指明年度藏羊生产力最大的各轮牧草场放牧强度的最佳配置。此理论方法也为轮牧草场的试验设计指出一条新的途径。

优 化 模 型

考虑一群数量相对稳定的家畜在某段时间 T 内于牧场轮牧。假设这个牧场被分为 n 个不同的轮牧草场 G_i ($i=1, 2, \cdots, n$)，时间段 T 被分为 n 个轮牧时间段 T_i ($i=1, 2, \cdots, n$; $\sum_{i=1}^{n} T_i = T$)，并且于 T_i 时间段在 G_i 草场上以 X_i ($i=1, 2, \cdots, n$)（只/公顷）放牧强度放牧家畜。

不管是连续放牧还是轮牧，各草场的家畜个体增重与放牧强度之间在很大的放牧强度范围内存在一种线性关系（Jones 等，1974；Jones，1981；周立等，1995）

$$Y_i = a_i - b_i X_i \tag{1}$$

$$b_i > 0, a_i > 0$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

式中 Y_i 表示在 G_i 草场上以放牧强度 X_i 经 T_i 时间放牧后家畜的平均个体增重（公斤/只）。现假定各轮牧草场经过独立的放牧强度试验后关系式 (1)，即 a_i，b_i 已知。于是，在 G_i 草场每公顷草场面积上家畜的活增重 Z_i（公斤/公顷）($i=1, 2, \cdots, n$) 为

$$Z_i = a_i X_i - b_i X_i^2 \tag{2}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

以下以 Z_i 作为 G_i 轮牧草场家畜生产力的度量。对于 G_i 轮牧草场，每只家畜平均占有草地面积 $\frac{1}{X_i}$ 公顷。那么在整个 T 时间内每只家畜累计占有牧场面积 $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}$ 公顷。因此，在 T 时间的平均放牧强度为

$$X_T = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}} = \frac{\prod_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} X_j} \tag{3}$$

而每只家畜在 G_i 草场占地面积与累计占有牧场面积之比为

$$R_i = \frac{\frac{1}{X_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} X_j}{\sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} X_j} \tag{4}$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

显然，$\sum_{i=1}^{n} Ri=1$。由于畜群尺度基本稳定，即在各轮牧草场上载畜量基本相同。因而每只家畜于各轮牧草场的占地比例 R_i，也是 G_i 草场面积占牧场总面积的比例。若按面积平均计算，在每公顷牧场草地面积中轮牧草场 G_i 占有 R_i 公顷草地。于是，经过一次轮牧之后到达 T 时间区间的终点时，每公顷牧场面积上平均家畜生产力 P（公斤/公顷）为

$$P=\sum_{i=1}^{n} R_i Z_i \tag{5}$$

牧场经营者的目标之一是最大家畜生产力。亦即调整各轮牧草场的放牧强度 X_i，使 P 达到最大。若用数学语言描述，就是求 n 元变量的非线性函数 P 的最大值点。对于一个实际经营的牧场而言，显然各轮牧草场的放牧强度 $X_i>0$。于是，轮牧草场放牧强度优化配置问题可以表为

$$\begin{gathered}\text{Max} \quad P=\sum_{i=1}^{n} R_i Z_i \\ X_i>0 \\ (i=1,2,\cdots,n)\end{gathered} \tag{6}$$

称（6）式为轮牧草场放牧强度配置优化模型。这里目标函数是生产力，亦可为经济效益或其他表示牧场生产性能函数所代替。问题在于（6）式是一个多元非线性函数无约束最优化问题。

这里顺便指出，对于一个轮牧草场，不同的放牧起始时间和不同的持续放牧、休牧时间长度，其营养水平、最大负载能力和家畜生产力均不相同（Bransby，1986；Wilson，1986；周立等，1995），因此，（6）式的优化结果也不会相同。所以，在进行独立放牧强度试验估计各轮牧草场的 a_i、b_i 时，放牧的起始时间和持续放牧时间长度一定要与时间段 T_i 重合。当然，一个实际经营的牧场还需考虑最大生产力（经济效益）的持续性或草地的稳定性，但这只能针对具休的牧场和施行的放牧制度来讨论。

优化模型解的存在与唯一性

记 $R^n=L\ (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，$R^n_+=\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\ |x_i>0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$。在区域 R^n_+ 内，显然，函数 R_i、Z_i（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）连续，并且有连续的各阶偏导数。因为区域 R^n_+ 不包含其边界。如果函数 P 在 R^n_+ 上有最大值，则其必然在 G 内的某点达到。显然，该点一定是局部极大值点。因此，在该点满足条件

$$\begin{gathered}\frac{\partial P}{\partial X_i}=0 \\ (i=1,2,\cdots,n)\end{gathered} \tag{7}$$

但满足必要条件（7）式的点（称为稳定点）未必是极值点（更不要说最大值点），还需通过函数 P 的2阶导数加以判断。设 $X=(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$ 和 $X^*=(X_1^*,\ X_2^*,\ \cdots,\ X_n^*)$ 是 R^n_+ 内的点，记 $X_i-X_i^*=h_i$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$），将函数 P 在 X^* 点 *Taylor* 展开

$$P(X_1^*+h_1,X_2^*+h_2,\cdots,X_n^*+h_n)=P(X_1^*,X_2^*,\cdots,X_n^*)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P}{\partial X_i}h_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 P}{\partial X_i\partial X_j}h_ih_j+R_n \tag{8}$$

其中 R_n 是 h_i 的 3 阶无穷小量。若 X^* 是稳定点，则其是否是极值点或极大、极小值点，完全由 2 阶导数 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})=\left(\frac{\partial^2 P}{\partial X_i\partial X_j}\right)$ 的性质决定。若 A 是正定矩阵，则 X^* 是极小值点。若 A 为负值，则 X^* 是极大值点。除 $A=0$ 外，其他情况 X^* 不是极值点（鞍点）。对于 $A=0$，还需探讨高阶导数矩阵的性质来判定 X^* 是否是极值点。

极值具有局部属性，在一个不包括边界的开区域上若没有极大值，肯定没有最大值。即使有极大值，也未必有最大值。而我们的问题（6）式是寻找开区域 R^n_+ 上的最大值点，极大值点只不过是寻找最大值点的桥梁而已，并非是目的。极大值点的存在与否尚需要经过上述繁琐的计算和判断。那么按照常规方法，最大值点存在与否的判别就更加困难。为了使求解过程有意义，在求解之前有必要定性地探讨问题（6）式的解是否存在?是否唯一?

注意（2）式，Z_i 只是变量 X_i 的函数，并且其2次项系数恒为负值、1次项系数恒为正值、常数项恒为0（$i=1, 2, \cdots, n$），即函数 Z_i 是二维平面（X_i，Z_i）上开口向下、经过坐标原点的抛物线，并且其极大值点位于 $X_i>0$ 一侧。这就决定了函数 P（（5）式）的特殊性质。若将函数 P 看作 X_{n+1} 轴上的变量，则在 $n+1$ 维空间 $R^{n+1}=L(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1})$ 上，由（5）式不难看出，对于任何经过原点、在区域 R^n_+ 上投影不为空集的超平面，它与曲面 P 的交线是一个开口向下、经过原点的抛物线，并且其极大值点恰好位于 R^n_+ 内。显然，对于该超平面与 n 维子空间 R^n 交线上所有属于 R^n_+ 的点 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 组成的集合 K，该抛物线存在唯一的稳定点，它恰是极大值点，也是集合 K 上函数 P 的最大值点。在区域 R^n_+ 范围内的曲面 P，当 R^n_+ 内的点无限逼近其边界，即坐标原点和各坐标轴 X_i（$i\leqslant n$）时，该曲面沿着下降方向趋向于0。也就是说，曲面 P 是一个倒扣在 R^n_+ 上方、类似于抛物面的曲面。从几何直观上不难想象，R^n_+ 范围内所有上述抛物线中，存在一条抛物线。它的极大值恰是所有抛物线极大值的最大者。显然，该极大值即是函数 P 于区域 R^n_+ 上的最大值。还由于 $\sum_{i=1}^{n}R_i=1$，在 R^n_+ 内这个极大值点还是曲面 P 于 R^n_+ 内的唯一稳定点。我们把上述分析综合为如下定理。

定理（解的存在与唯一性） 函数 P 在区域 R^n_+ 内存在唯一的稳定点。它必定是个极大值点，并且是函数 P 在 R^n_+ 上的严格最大值点。即非线性无约束最优化问题（6）式的解存在且唯一。

对于任意的正整数 n，依照上述几何分析的思想可以严格地证明这个定理。但证明过程冗长、所占篇幅较多，且其与 $n=2$ 时的证明没有本质上的差别。为了直观和节省篇幅，在附录中仅就 $n=2$ 给出这个定理的数学证明。

优化模型解的解析表达式

根据解的存在与唯一性定理，求解最优化问题（6）式，只须找出函数 P 于区域 R^n_+ 上的稳定点即可。寻找稳定点，在直角坐标系下解方程组（7）式是一种途径，附录中解

的存在与唯一性定理的证明过程又为我们提供了另一种途径，即从极坐标角度求解方程（28）式（当 $n>2$时为一方程组）。事实上，定量的定理证明过程已经为我们提供 $n=2$时稳定点，即解的解析表达式（（30）），式方程（方程组）（28）式比方程组（7）式低一阶，并且当 $n>2$时，方程组（28）式的各方程在形式上是对称的，比较容易求解。因此，后一途径较为方便。为了大致看出问题（6）式解的一般形式，我们用后一途径就 $n=3$推导问题（6）式解的表达式。但考虑到下一部分分析讨论的需要，还从前一途径重新推导 $n=2$时问题（6）式的解，不过过程尽量简化。

当 $n=2$时，$R_1=\dfrac{X_2}{X_1+X_2}$，$R_2=1-R_1$，$P=R_1Z_1+(1-R_1)Z_2$。于是，条件（7）式变为

$$\frac{\partial P}{\partial X_1}=\frac{\partial R_1}{\partial X_1}(Z_1-Z_2)+R_1\frac{dZ_1}{dX_1}=0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial P}{\partial X_2}=\frac{\partial R_1}{\partial X_2}(Z_1-Z_2)+(1-R_1)\frac{dZ_2}{dX_2}=0$$

注意

$$\frac{\partial R_1}{\partial X_1}=\frac{-X_2}{(X_1+X_2)^2};\quad \frac{\partial R_1}{\partial X_1}=\frac{X_1}{(X_1+X_2)^2} \tag{10}$$

从而

$$\frac{\partial P}{\partial X_1}=\frac{-X_2}{(X_1+X_2)^2}(Z_1-Z_2)+\frac{X_2}{X_1+X_2}\frac{dZ_1}{dX_1}=0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial P}{\partial X_2}=\frac{X_1}{(X_1+X_2)^2}(Z_1-Z_2)+\frac{X_1}{X_1+X_2}\frac{dZ_2}{dX_2}=0$$

于是

$$Z_1-Z_2=X_2\frac{dZ_1}{dX_1}-X_1\frac{dZ_2}{dX_2} \tag{12}$$

将（12）式代入（11）之第2式，得

$$\frac{dZ_1}{dX_1}=-\frac{dZ_2}{dX_2} \tag{13}$$

再将（13）式代入（12）式，得

$$Z_1-Z_2=-(X_1+X_2)\frac{dZ_2}{dX_2} \tag{14}$$

由（2）式求得 Z_1和 Z_2的一阶导数，并代入（13）式，得到

$$X_1=\frac{a_1+a_2-2b_2X_2}{2b_1} \tag{15}$$

将 Z_1，Z_2表达式、Z_2的一阶导数和（15）式代入（14）式，化简后得到

$$\frac{(a_1+a_2)^2}{4b_1}-\frac{b_2(a_1+a_2)}{b_1}X_2+\frac{b_2(b_2-b_1)}{b_1}X_2^2=0 \tag{16}$$

解2次方程（16）式，得

$$X_2=\frac{(a_1+a_2)(b_2\pm\sqrt{b_1b_2})}{2b_2(b_2-b_1)} \tag{17}$$

$$X_1 = \frac{a_1 + a_2 - 2b_2x_2}{2b_1}$$

(17) 式表明，函数 P 有两个稳定点。当 $\sqrt{b_1b_2}$ 取“+”号时

$$X_2 = \frac{a_1 + a_2}{2b_2\left(1 - \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}\right)}$$

$$X_1 = \frac{(a_1 + a_2) - \frac{a_1 + a_2}{\left(1 - \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}\right)}}{2b_1}$$

若 $\sqrt{\frac{b_1}{b_2}} > 1$，则 $X_2 < 0$。若 $\sqrt{\frac{b_1}{b_2}} < 1$，则 $X_1 < 0$。亦即只要 $b_1 \neq b_2$，$\sqrt{b_1b_2}$ 取“+”号得到的稳定点不在 R_+^2 内，而 $\sqrt{b_1b_2}$ 取“—”号确定的稳定点

$$X_2 = \frac{a_1 + a_2}{2(\sqrt{b_1b_2} + b_2)}$$

$$X_1 = \frac{a_1 + a_2 - \frac{a_1 + a_2}{1 + \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}}}{2b_1} = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}}X_2 \tag{18}$$

才是函数 P 在 R_+^2 内的唯一稳定点，即问题 (6) 式的解。若 $b_1 = b_2$，则方程 (16) 式退化为一次方程，函数 P 只有一个稳定点。

$$X_1 = X_2 = \frac{a_1 + a_2}{4b_1} \tag{19}$$

显然该稳定点在 R_+^2 内。这个稳定点也可以从 (18) 式计算出来。所以，无论何种情况 (18) 式都能表示函数 P 在 R_+^2 上的唯一稳定点。即 (18) 式是问题 (6) 式 $n=2$ 时解的解析表达式。

当 $n=3$ 时，曲面 P

$$P = \sum_{i=1}^{3} \frac{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{3} X_k}{\sum\limits_{l=1}^{3}\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq l}}^{3} X_j} Z_i$$

与经过原点的超平面

$$S: \begin{array}{l} X_1 = \lambda X_3 \\ X_2 = \mu X_3 \\ \lambda, \mu > 0 \end{array}$$

的交线为

$$P = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu + \lambda\mu}(a_1 + a_2 + a_3) - \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu + \lambda\mu}(b_1\lambda + b_2\mu + b_3)$$

该抛物线的极大值点为

$$
\begin{aligned}
X_3^{(s)} &= \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2(b_1\lambda + b_2\mu + b_3)} \\
X_2^{(s)} &= \mu X_3 \\
X_1^{(s)} &= \lambda X_3
\end{aligned}
\tag{20}
$$

其极大值为

$$P_S = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu + \lambda\mu} \cdot \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{4(b_1\lambda + b_2\mu + b_3)}$$

此时方程（28）式变为方程组。

$$\frac{dP_S}{d\lambda} = \frac{\mu(a_1 + a_2 + a_3)^2}{4(\lambda + \mu + \lambda\mu)(b_1\lambda + b_2\mu + b_3)}\left[\frac{\mu}{\lambda + \mu + \lambda\mu} - \frac{b_1\lambda}{b_1\lambda + b_2\mu + b_3}\right] = 0$$

$$\frac{dP_S}{d\mu} = \frac{\lambda(a_1 + a_2 + a_3)^2}{4(\lambda + \mu + \lambda\mu)(b_1\lambda + b_2\mu + b_3)}\left[\frac{\lambda}{\lambda + \mu + \lambda\mu} - \frac{b_2\mu}{b_1\lambda + b_2\mu + b_3}\right] = 0$$

由于 a_i，b_i，λ，$\mu>0$，它等价于

$$\frac{\mu}{\lambda + \mu + \lambda\mu} - \frac{b_1\lambda}{b_1\lambda + b_2\mu + b_3} = 0$$

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu + \lambda\mu} - \frac{b_2\mu}{b_1\lambda + b_2\mu + b_3} = 0$$

其解

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{b_2}{b_1}}\mu$$

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{b_3}{b_2}}$$

因为在 R_+^3 内 λ，$\mu>0$，为了得到 R_+^3 内的稳定点，上式均取正号。

$$\lambda = \sqrt{\frac{b_2}{b_1}}\mu = \sqrt{\frac{b_3}{b_1}}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{b_3}{b_2}}$$

将 λ，μ 值代入（20）式，即得 R_+^3 上函数 P 的稳定点，问题（6）式的解

$$
\begin{aligned}
X_3 &= \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2(\sqrt{b_1b_3} + \sqrt{b_2b_3} + b_3)} \\
X_2 &= \sqrt{\frac{b_3}{b_2}}X_3 \\
X_1 &= \sqrt{\frac{b_3}{b_1}}X_3
\end{aligned}
\tag{21}
$$

比较 $n=2$ 和 $n=3$ 时，问题（6）式解的表达式为（18）式和（21）式，不难看出，对任意的正整数 n 问题（6）式解的一般解析表达式应为

$$X_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{2(\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{b_i b_n} + b_n)}$$

$$X_i = \sqrt{\frac{b_n}{b_i}} X_n \tag{22}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n - 1)$$

可以严格证明（22）式是问题（6）式的通解。但证明过程所占篇幅过多，故予省略。

高寒草甸两季轮牧草场放牧强度的最佳配置

高寒草甸牧场分为冬春（冷季）和夏秋（暖季）草场，实行季节性轮牧。轮牧的时间分配为冬春草场7个月（11月1日至翌年5月31日）、夏秋草场5个月（6月1日至10月31日）。每年于10月下旬至11月上旬出栏一次。在两次出栏之间的年度内是一个连续生产过程。两季草场的家畜数量相对稳定。冬春、夏秋草场最大负载能力分别为1.56只/公顷和14.10只/公顷。最大藏羊生产力放牧强度分别为0.78只/公顷和7.05只/公顷。两季草场差异悬殊，主要是由于两季草场利用时间差异引起的。按实际轮牧时间分配，通过放牧强度试验已获得夏秋、冬春草场藏羊个体增重关于放牧强度的定量关系（周立等，1995）。

$$\begin{aligned} Y_1 &= 13.46 - 0.9549X_1 (\text{夏秋草场}) \\ Y_2 &= 2.873 - 1.118X_2 (\text{冬春草场}) \end{aligned} \tag{23}$$

将参数 $a_1=13.46$，$b_1=0.9549$，$a_2=2.873$和 $b_2=1.118$代入（18）式，立刻得到问题（6）式的解：$X_1=4.1076$，$X_2=3.7962$。此即年度藏羊生产力达到最大的高寒草甸牧场两季轮牧草场放牧强度的最佳配置：夏秋草场4.1076只/公顷，冬春草场3.7962只/公顷。此时夏秋、冬春草场的藏羊生产力分别为39.177公斤/公顷和－5.205公斤/公顷，年度为16.112公斤/公顷。

讨　论

高寒草甸牧场由于两季草场最大负载能力的悬殊差异，在年度生产过程中冬春草场的放牧强度一般都超过最大负载能力。冬春草场的家畜生产力为负值，从而使得年度家畜生产力只能维持于较低水平。要摆脱这种困境，从根本上讲，必须改变“靠天养畜”的局面，进行大量投入，变革传统的畜牧业经营方式。但就目前的财力和经营水平来看，短期内是难以做到的。在现有的生产环境和经营方式下，在保护天然草场的前提下，优化畜牧业生产结构，是提高生产力的重要途径。而放牧强度的优化配置是其中内容之一。

如果暂且不考虑草场的稳定性，夏秋、冬春草场的最大藏羊生产力放牧强度分别为7.05只/公顷和0.78只/公顷。直观看起来，似乎只要两季草场均以其最大生产力强度放牧，即可达到年度最大生产力。然而此时的年度平均生产力只有6.41公斤/公顷，相当于放牧强度最佳配置时的40%。从（13）式可以看出，欲达到年度生产力最大，两季草场的

放牧强度必须使得两者的生产力函数的变化速率，方向相反、数值相等。亦即它们相互对应地分布在各自最大生产力放牧强度的左、右两侧。问题（6）式的解（18）式可以变形为

$$X_2=\frac{a_2}{2b_2}\cdot\frac{1+\frac{a_1}{a_2}}{1+\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}}$$

$$X_1=\sqrt{\frac{b_2}{b_1}}X_2$$

当$\frac{a_1}{a_2}>\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}$时，$X_2$位于其最大生产力放牧强度（$\frac{a_2}{2b_2}$）右侧，$X_1$反之；当$\frac{a_1}{a_2}<\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}$时，$X_2$位于其最大生产力放牧强度的左侧，$X_1$反之。只有当$\frac{a_1}{a_2}=\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}$时，$X_1$、$X_2$分别与其各自的最大生产力放牧强度重合。显然，若$a_1=a_2$、$b_1=b_2$，则$X_1=X_2$均为其最大生产力放牧强度。若$a_1\neq a_2$，但$b_1=b_2$，此时也有$X_1=X_1$，但它们分布在各自的最大生产力放牧强度的左、右侧。由此看来，当进行非季节性的小区轮牧时，若各轮牧小区草场的营养水平（a_i）、稳定性和恢复力（b_i）相近，则应以相同的强度（最大生产力放牧强度）轮牧，可使轮牧的生产力最大。即使a_i有较大的差异，只要$b_1=b_2$，也应以相同的强度放牧。

利用（13）式可将（12）式变形为

$$Z_1-X_1\frac{dZ_1}{dX_1}=Z_2-X_2\frac{dZ_2}{dX_2} \tag{12'}$$

若以X、Z分别作为横纵轴构造坐标平面，把X_1和X_2，$Z_1=Z_1$（X_1）和$Z_2=Z_2$（X_2）分别看作X、Z轴上的变量，则（12′）式左端在几何上表示抛物线Z_1（X_1）于点（X_1，Z_1（X_1））的切线

$$Z=Z_1(X_1)+\frac{dZ_1}{dX_1}(X-X_1)$$

于Z轴上的截距，而右端表示Z_2（X_2）抛物线于点（X_2，Z_2（X_2））处的切线在Z轴上的截距。若X_1、X_2是优化问题（6）式的解，则（12′）式表明，两切线在Z轴上的截距相等，即在Z轴上相交于一点。

综合（12）、（13）式，从几何上表示：从Z轴上某点出发的两条关于水平对称的、朝向X轴正方向的射线，分别与抛物线Z_1（X_1）和Z_2（X_2）相切，切点的横坐标恰好是优化问题（6）式的解。我们称（12）、（13）式或者它们所表示的轮牧草场放牧强度最佳配置规律为“匹配准则”。

周立等（1995）曾按照高寒草甸牧场生产实践中两季草场的植被类型、习惯上的轮牧时间分配，以两季草场同等牧草利用率（30%，35%，45%，50%和60%）进行藏羊放牧强度试验。两个年度的试验结果表明，45%牧草利用率所对应的两季草场放牧强度（夏秋草场4.30只/公顷，冬春草场3.51只/公顷，年平均1.93只/公顷），既可以持续家畜生产力，也能维持草场的稳定。依据试验数据所建立的家畜生产力模型显示，最大年度生产力的放牧强度是1.97只/公顷（年均放牧强度），与45%牧草利用率的年放牧强度十分

接近。因此，可以认为该放牧强度也能持续最大年度家畜生产力。但是，上述结论是以两季草场牧草利用率相同为约束来配置其放牧强度的条件下得到的。如果抛开这个约束，任意搭配两季草场的放牧强度，何种配置之下能使年度家畜生产力达到最大?本文优化的结果是：夏秋草场4.11只/公顷，冬春草场3.80只/公顷，年度平均1.97只/公顷。可能是出于巧合，45%牧草利用率所对应的放牧强度与优化结果很接近。但由此也可以认为，优化的放牧强度配置不但能获得是大家畜生产力，而且还能维持草场的稳定，即能持续最大生产力。若以牧草利用率来衡量高寒草甸牧场的放牧强度配置，两季草场均为45%左右的牧草利用率最佳。

对于年度最大生产力年均放牧强度，家畜生产力模型的分析结果与优化结果相同。但两季轮牧草场的放牧强度略有差异（模型结果为夏秋草场4.32只/公顷、冬春草场3.61只/公顷）。这是由于在放牧强度试验设计中，两季草场的放牧强度配置存在某种特定关系引起的。事实上，任何试验都不可能做到轮牧草场放牧强度的任意配置，离散的放牧强度组合之间必定存在某种联系。因此，通常得不到任意配置的最佳结果，即使偶然巧合也没有识别的方法。利用本文提供的理论方法，在试验设计中可以独立地随意选择各轮牧草场的放牧强度。最终均可获得最佳配置。把试验设计者从不可能做到的任意性和实际相关性的烦恼中解脱出来。

附　　录

最优化问题（6）式解的存在与唯一性定理在 $n=2$ 时的证明：

对于 R_+^2 内任意一点 $X=(X_1, X_2)$，令 $\lambda=\dfrac{X_1}{X_2}$（>0），则在 X_1，X_2坐标平面上点 X 位于射线上。

$$S:\quad X_1=\lambda X_2 \tag{24}$$

将（24）式代入 P 的表达式，于是

$$\begin{aligned}P&=\frac{X_2}{X_1+X_2}(a_1X_1-b_1X_1^2)+\frac{X_1}{X_1+X_2}(a_2X_2-b_2X_2^2)\\&=\frac{\lambda}{\lambda+1}(a_1+a_2)X_2-\frac{\lambda}{\lambda+1}(b_1\lambda+b_2)X_2^2\end{aligned} \tag{25}$$

因为 a_i，b_i 及 λ 均大于0，故该抛物线在射线 S 上有一极大值点 $X_\lambda=(X_1^{(\lambda)}, X_2^{(\lambda)})$

$$X_2^{(\lambda)}=\frac{a_1+a_2}{2(b_1\lambda+b_2)} \tag{26}$$

$$X_1^{(\lambda)}=\lambda X_2^{(\lambda)}$$

显然，$X_\lambda\in R_+^2$。其极大值为

$$P_\lambda=\frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot\frac{(a_1+a_2)^2}{4(b_1\lambda+b_2)}=P(X_\lambda) \tag{27}$$

恒有

$$P(X)\leqslant P_\lambda$$

P_λ 作为 λ 的函数求其稳定点

$$\frac{dP_\lambda}{d_\lambda}=\frac{(a_1+a_2)^2}{4(\lambda+1)(b_1\lambda+b_2)}\left[\frac{1}{\lambda+1}-\frac{b_1\lambda}{b_1\lambda+b_2}\right]=0 \tag{28}$$

于是

$$\lambda=\pm\sqrt{\frac{b_2}{b_1}} \tag{29}$$

若斜率 λ 从 0_+ 变化到 $+\infty$ 时，射线 S 扫描了整个 R_+^2 区域，因此，对 R_+^2 内的任意点恒有 $\lambda\in$（0，$+\infty$）。当 λ 取负值时，射线 S 位于区域 R_+^2 之外。与之相应的射线 S 上的稳定点肯定不在 R_+^2 之内。（29）式表明，P_λ 在 λ 区间（0，$+\infty$）上有唯一的稳定点 $\lambda^*=\sqrt{\frac{b_2}{b_1}}$。与之一一对应的 X_1，X_2 平面上的极大值点 X_{λ}^*（（26）式）

$$X_2^{(\lambda^*)}=\frac{a_1+a_2}{2(b_1\lambda^*+b_2)}=\frac{a_1+a_2}{2(\sqrt{b_1b_2}+b_2)} \tag{30}$$

$$X_1^{(\lambda^*)}=\sqrt{\frac{b_2}{b_1}}X_2^{(\lambda^*)}$$

因其是某一射线 S 上的极大值点，满足

$$\frac{\partial P}{\partial X_2}\Big|_{X_{\lambda^*}}=0$$

再由（27）式

$$\frac{dP_\lambda}{d\lambda}\Big|_{\lambda^*}=\frac{dP}{d\lambda}\Big|_{X_{\lambda^*}}=\frac{\partial P}{\partial X_1}\frac{dX_1^{(\lambda)}}{d_\lambda}+\frac{\partial P}{\partial X_2}\frac{dX_2^{(\lambda)}}{d\lambda}=0$$

从而

$$\frac{\partial P}{\partial X_1}\Big|_{X_{\lambda^*}}=0$$

亦即 X_{λ^*} 是函数 P（X）在区域 R_+^2 上的稳定点，反之亦然。由于 λ 与 X_λ 是一一对应的（（26）式），故函数 P 在 R_+^2 上存在唯一的稳定点 X_{λ^*}。

当 $\lambda=\lambda^*$ 时，2阶导数

$$\frac{d^2P_\lambda}{d\lambda^2}=\frac{(a_1+a_2)^2}{4}\cdot\frac{2b_1(b_1\lambda^2-b_2)(\lambda+1)-2(b_1\lambda+b_2)^2}{(\lambda+1)^3(b_1\lambda+b_2)^3}<0$$

因此，λ^* 是 P_λ 的极大值点。由于 λ^* 是 P_λ 于区间（0，$+\infty$）上的唯一稳定点，故 λ^* 也是 P_λ 于该区间上的最大值点。若 $\lambda\neq\lambda^*$，则 $P_\lambda<P_{\lambda^*}$，亦即若 $X_\lambda\neq X_{\lambda^*}$，P（$X_\lambda$）<P（$X_{\lambda^*}$）。于是，当 $X\neq X_{\lambda^*}$ 时有

$$P(X)\leqslant P_\lambda<P_{\lambda^*}=P(X_{\lambda^*}),$$

或

$$P(X)<P_\lambda\leqslant P_{\lambda^*}=P(X_{\lambda^*})$$

总之

$$P(X)<P(X_{\lambda^*})$$

亦即 X_{λ^*} 不但是函数 P（X）于 R_+^2 区域上严格极大值点，而且是严格最大值点。

参 考 文 献

周　立、王启基、赵　京、周　琪，1955　高寒草甸牧场最优放牧强度的研究 I．藏羊最大生产力放牧强度．高寒草

甸生态系统第4集。科学出版社。
Bransby D I, Tainton N M, 1986, Management of grazing systems: reseach proposals for the future with reference to stocking rate and rotational grazing. in Rangeland: a resource under siege (Joss, R. J., Lynch, P. W. and O. B. Williams eds.). Cambridge Univ. New York.
Jones R J, 1981, Interpreting fixed stocking rate experiments. in Forage evaluation: concepts and techniques (Wheeler, L. and R. D. Mochrie eds.). CSIRO, Melbourne.
Jones R J, Sandland R L, 1974, The relation between animal and stocking rate. Derivation of the relation from the results of grazing trials. J. Agric. Sci. 83: 335—342.
Wilson A D, 1986, Principles of grazing management systems. in Rangeland: a resource under siege (Joss, R. J., Lynch, P. W. and O. B. Williams eds.). Cambridge Univ. New York.

STUDIES ON OPTIMUM STOCKING INTENSITY IN PASTURELANDS OF ALPINE MEADOW

Ⅱ. THE OPTIMUM COMBINATION BETWEEN STOCKING INTENSITIES IN ROTATIONAL GRAZING GRASSLANDS

Zhou Li Wang Qiji Zhao Jing
(Northwest Institute of Biology, The Chinese Academy of Sciences)
Zhou Qi
(Labour Worker University of Jielin City)

Abstract

Rotational grazing is generally accepted for pasturelands of different types in the world. How are stocking intensities in rotational lands combined such that animal production or profit after a cycle of rotational grazing is maximum?Be restricted by labour, financial resources and time, total experiments of arbitrary combinations between stocking intensities for rotational lands should be not accomplished. Therefore, the optimum combination between stocking intensities is generally not obtained directly from combination trials, even if it was accidently obtained, also could not be distinguished from infinite combinations.

The maximization of animal production or profit after a cycle of rotational grazing is mathematically described as a problem of nonlinear optimization without constrainted:

$$\text{Max } P = \sum_{i=1}^{n} R_i Z_i$$
$$X_i > 0 \tag{1}$$
$$i = 1, 2, \cdots, n$$

Where P is sheep production (Kg/ha) or profit (Yuan/ha) after a cycle of rotational grazing; $R_i = \frac{\frac{1}{X_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_j}}$, ratios of occupying area in ith rotational land to accumulative occupying area per head. X_i is stocking intensity in ith rotational land (animal/ha). $Z_i = a_i x_i - b_i x_i^2$, is animal production or profit function on stocking intensity X_i in ith rotational land.

The existence and uniqueness of the solution of problem (1) are stated as follows:

Theorem: The function P has an unique stationary point $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ in the region $R_+^n = \{ (X_1, X_2, \cdots, X_n) \mid X_i > 0, i = 1, 2, \cdots n\}$. The point must be a relative maximum and a strict maximum of function P in region R_+^n, i. e. the solution of optimization problem (1) exists uniquely. The proof of the theorem is given in Appendix.

The solution of problem (1) is analytically derived, and the general analytical expression of the solution is as follows:

$$X_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{2(\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{b_i b_n} + b_n)}$$
$$X_i = \sqrt{\frac{b_n}{b_i}} \cdot X_n \tag{2}$$
$$i = 1, 2, \cdots, n-1$$

For pasturelands of alpine meadow in Qinghai-Tibetan, seasonal grazing has been historically performed, and has divided a pastureland into Summer-Autumn and Winter-Spring grazing grassland in a year. Seasonal production functions of Tibetan sheep

$$Z_1 = 13.46X_1 - 0.9549X_1^2 \quad \text{(Summer-Autumn land)}$$
$$Z_2 = 2.873X_2 - 1.118X_2^2 \quad \text{(Winter-Spring land)}$$

have been obtained from the results of grazing trial on stocking intensity. The optimum combination, that is the solution of problem (1) for $n=2$, between stocking intensities in two rotational lands is $X_1 = 4.1076$ and $X_2 = 3.7962$ Tibetan sheep/ha according to the expression (2) of the solution. The stability of the grasslands and Tibetan sheep production is discussed under the optimum combination of stocking intensity during two years from the results of grazing trial, the optimum combination of stocking intensity, that corresponds about 45% of forage utilization for each seasonal grassland, could sustain the maximum Tibetan sheep production in pasturelands of alpine meadow.

Key words: Rotation pasturelands; Optimum matching of intensities; Nonlinear optimization model without constrainted; Existence and uniqueness of solution; Pasturelands of alpine meadow