

## 高寒牧场最优生产结构的研究\*

### Ⅲ. 藏羊个体最佳出栏年龄\*\*

周立 赵新全 王启基

(中国科学院西北高原生物研究所)

#### 摘 要

建立藏羊个体各年龄出栏的累计净货币收益概率统计模型,以个体累计净货币收益最大为目标来搜寻不受资源约束的母、羯羊个体最佳出栏年龄。这个无约束最优化问题的解表明,羯羊0岁(10月龄)、母羊6岁(6岁10月龄)出栏最佳。母羊的繁殖收益是导致母、羯羊出栏年龄差异的根本原因。个体最佳出栏年龄与种群最佳出栏年龄基本相容。

**关键词:** 个体最佳出栏年龄; 经济概率统计模型; 无约束最优化问题; 藏系绵羊。

以种群的整体最大收益为目标的种群结构和出栏、替补方案,可以通过线性规划模型获得(本研究I, II)这样的种群结构和出栏方案,是在有限资源和种群结构平衡的约束下,从种群的整体利益出发确定的最优配置和出栏、替补调整措施,但就局部个体收益而言,最优出栏方案中的出栏年龄是否仍然最优?是个值得探讨的问题。因为常识告诉我们,各局部最优并不一定能保证整体最优,反之亦然,亦即局部最优和整体最优有时是相悖的。

本文以直至出栏为止的个体累计净货币收益多寡作为评判标准,研究藏羊个体的最佳出栏年龄。

#### 个体出栏年龄优化模型

个体出栏年龄优化问题与种群整体结构优化不同,不存在种群结构平衡约束和资源约束,因而是一个无约束最优化问题:

$$\text{Max } NR(t) = F(t) - G(t); t \geq 0 \quad (1)$$

这里,  $NR(t)$  表示第  $t$  龄藏羊出栏时为止包括出栏收益在内的个体累计净收益(元);

\* 国家自然科学基金和中国科学院海北高寒草甸生态系统定位站基金资助项目。

\*\* 承蒙夏武平教授指导,特此致谢。

$F(t)$  和  $G(t)$  分别表示到第  $t$  龄出栏时为止个体累计(粗)收入(包括出栏收入)(元)和个体累计成本支出(元);  $t$  是从藏羊出生之时算起的时间,即年龄。显然,只要获得  $F(t)$  和  $G(t)$  的解析表达式,不论其连续、可微等数学特性如何,我们总可以利用解析法或直接法等最优化方法求得  $NR(t)$  的极值点,从而得到最佳出栏年龄  $t$ 。但是,由于经营管理活动的多样性、复杂性,以及某些活动的不连续性,对任意时刻  $t$  给出  $F(t)$  和  $G(t)$  较精确的表达式有一定的困难,即使给出也是比较繁琐的;同时,鉴于下述原因,也没有必要。

根据高寒牧区的地理、气候条件以及牧草和藏羊的生长节律,通常10—11月藏羊体重达到一年中的高峰,此后在严酷的冷季环境下和质量低劣、甚至数量不足的枯草限制下,体重持续下降,直至翌年4—5月暖季来临,牧草返青才开始回升。因此,高寒牧区在自然放牧条件下家畜出栏时间历来固定在10—11月。若考虑到出栏时间固定,则上述无约束最优化问题(1)的优化变量  $t$  (出栏时间连续变量,亦即出栏年龄)被离散化。高寒牧区藏羊产羔时间通常在冬季(元月前后)或春季(4月前后),以冬季为主。若以冬羔为例考虑,则藏羊的出栏年龄,即出栏时间变量  $t$  被离散为10个月、1岁10个月、2岁10个月、...等,为了方便,我们分别称之为0岁、1岁、2岁、...等。这样,出栏年龄(出栏时间)  $t$  的单位就是年,  $t$  的取值只可能是  $t_i = i$  岁 ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ),只须在这些可能的出栏年龄中选取个体累计净收益最大  $[\text{Max}NR(t_i)]$  的出栏年龄  $t_{i_0}$ 。并且,由于藏羊的寿命有限,该出栏年龄序列也是有限的。于是,无约束最优化问题(1)被大幅度减化,由求取连续变量函数  $NR(t)$  的极大值点问题转化为选取有限序列的极大值点问题(Cocks, 1968):

$$\begin{aligned} \text{Max}NR(t_i) &= F(t_i) - G(t_i) \\ t_i &= i \\ i &= 0, 1, \dots, M \end{aligned} \quad (2)$$

显然,逐点搜索方法即可奏效,只须求出  $F(t)$  和  $G(t)$  在离散的出栏年龄序列  $t_i$  ( $i = 0, 1, \dots, M$ ) 上的值或解析表达式即可,而这又是相对容易的。我们暂时限定藏羊的最大出栏年龄为8岁(8岁10个月),即  $M = 8$ ,后面的计算结果将表明,这一限制无损于优化问题(2)的解。

对于一个种群,存活率或死亡率是相应部分所占的比例;但就个体而言,则表示个体存活或死亡的概率。为了计入可能发生的死亡事件给个体收益带来的损失或附带收入,准确地估算各年龄个体收、支及净收益的数字期望(平均值),依概率观点将每个个体看作由2个部分组成:成活部分和死亡部分,他们所占的比例分别为存活率和死亡率。下面我们按这种观点用概率统计方法估计个体各项收、支。

从畜产品的生产来看,羯羊和母羊一样,作为生产者存栏时均有羊毛、死亡部分皮张等存栏收入,出栏时有皮、肉(胴体)等出栏收入。但从种群中的功能地位上来看,母羊与羯羊不同,母羊具有繁殖后代的功能,而羯羊没有。在藏羊种群中有占很小比例的种公羊(2%左右),因其是母羊显示繁殖功能所必须的,故将其也并入母羊考虑。母羊的繁殖功能是藏羊种群生产力的源泉之一,种群的总收益中就包含着母羊的繁殖收益(本项研究I, II)。因而,就繁殖母羊个体而言,其繁殖收益,即其出栏以前累计繁殖羔羊所带来的收益,也应计入其累计个体总收益  $F(t)$  之中。所以,我们分别优化羯羊和母羊的出栏年龄。于是,对于不同性别的藏羊各有一个优化问题(2):

$$\text{Max} NRM(t_i) = FM(t_i) - GM(t_i) \quad (3')$$

$$t_i = i \quad i = 0, 1, \dots, 8$$

简记为

$$\text{Max} NRM_i = FM_i - GM_i \quad (3)$$

和

$$\text{Max} NRF(t_i) = FF(t_i) - GF(t_i) \quad (4')$$

简记为

$$\text{Max} NRF_i = FF_i - GF_i \quad (4)$$

式中,  $NRM(t_i)$  和  $NRF(t_i)$  分别表示羯羊和母羊在  $t_i$  龄出栏时个体累计净收益(元), 简记为  $NRM_i$  和  $NRF_i$ ;  $FM(t_i)$  和  $FF(t_i)$  分别表示羯羊和母羊到  $t_i$  龄出栏时个体累计总(粗)收入(元), 简记为  $FM_i$  和  $FF_i$ ;  $GM(t_i)$  和  $GF(t_i)$  分别表示羯羊和母羊到出栏时间  $t_i$  为止个体累计成本支出(元), 简记为  $GM_i$  和  $GF_i$ 。

由于数据来源于混合种群, 缺少母、羯羊差异的详细数据, 并且两者是分别优化的, 故将同龄羯羊和母羊的存活率、个体产毛量、皮张价格、出栏收入和成本支出取成一样的。

羯羊的个体累计收入  $FM_i$ , 包括直到  $t_i$  年的逐年羊毛收入、逐年死亡部分的皮张收入和出栏收入。羯羊(母羊)的个体累计成本支出  $GM_i$  ( $GF_i$ ), 包括逐年的管理费、牧工工资、防疫费、冬季补饲费和围栏折旧费等, 以前 2 项所占比例最大。收入或支出均是从出生之时累计计算的, 直到出栏为止。于是, 按着概率统计对于羯羊有

$$NRM_i = \sum_{j=0}^i \left( \prod_{e=0}^j S_e \right) \cdot W_j + \sum_{j=0}^i KN_j + \left( \prod_{j=0}^i S_j \right) \cdot CL_i - \sum_{j=0}^i \left( \prod_{e=0}^{j-1} S_e \right) \cdot COST_j \quad (5)$$

其中

$$KN_j = \left( \prod_{e=0}^{j-1} S_e \right) (1 - S_j) \cdot CK_j \quad (6)$$

(5) 式的前 3 项之和是  $FM_i$ , 第 4 项是  $GM_i$ 。式中,  $S_j$  表示  $j$  龄藏羊的年存活率,  $W_j$  表示每只存活的  $j$  龄藏羊的年产毛收入(元);  $KN_j$  表示  $j$  龄藏羊死亡部分的年皮张收入(元);  $CK_j$  表示第  $j$  龄死亡羊只的皮张价格(元);  $CL_i$  表示每只存活的第  $j$  龄藏羊的出栏收入(肉、皮张)(元);  $COST_j$  表示每只存活的第  $j$  龄藏羊的个体年成本支出(元)。

显然,  $\prod_{e=0}^j S_e$  表示个体从出生存活到第  $j$  龄出栏时刻的概率, 也可以看作其个体中存活部

分所占的比例。藏羊死亡大部分出现在冬春草场，而于夏秋草场剪毛，因此，死亡部分没有羊毛收入，只有皮张收入。(5)式的第一项中 $\left(\prod_{e=0}^j S_e\right) w_i$ 是藏羊*j*龄时个体存活部分的年羊毛收入，即按概率统计的个体年产毛收入。由于不同年龄死亡的羊只其皮张价格不同，故将第*j*龄羊的死亡概率分解为0岁，1岁，…，*j*岁各年龄阶段死亡概率之和，以计算死亡皮张收入。藏羊从出生成活到*j*-1年龄阶段出栏时刻的概率是 $\prod_{e=0}^{j-1} S_e$  (*j* ≥ 1)，现定义当*j*=0时 $\prod_{e=0}^{j-1} S_e = 1$ ，于是，对任何*j* ≥ 0， $\left(\prod_{e=0}^{j-1} S_e\right) (1 - S_j)$ 表示成活到*j*-1龄出栏时刻而没有存活到*j*龄出栏时刻的概率，亦即第*j*龄年龄阶段的死亡概率，显然有

$$\sum_{j=0}^i \left(\prod_{e=0}^{j-1} S_e\right) (1 - S_j) = 1 - \prod_{e=0}^i S_e$$

表明以出栏时刻为统计点第*i*龄藏羊的死亡概率等于直到*i*龄的各年龄阶段死亡概率之和。因此，(6)式的 $KN_i$ 是第*i*龄年龄阶段个体死亡部分的皮张年收入。(5)式中第3项表示*i*龄藏羊个体出栏收入的数学期望，显然死亡部分的下栏收入为0。第4项中 $\left(\prod_{e=0}^{j-1} S_e\right) COST_j$ 表示*j*龄藏羊个体存活部分的年成本支出，包括成活到*j*龄而没有存活到*j*龄出栏时刻那部分的成本支出。求和号 $\sum_{j=0}^i$ 表示除出栏收入以外（只能出栏一次）各项收入或支出按年龄阶段以0岁开始累计，直至*i*龄出栏为止，以计算各项收、支乃至个体累计净收益的数学期望。

对于母羊，除与同龄羯羊相同的收入和支出外，尚有繁殖收益。母羊通常2岁开始配种，3岁开始生产羔羊，所以，2岁以下母羊的个体累计收支同于羯羊。3岁以上的繁殖母羊，从3岁起每年繁殖1次。我们以断奶时羔羊的个体净收益( $L_m$ )作为母体年繁殖收益的度量，以断奶时刻羔羊的繁活率作为母体每年生产羔羊的数量。若用 $PS_j$ 表示*j*龄 (*j* ≥ 3) 繁殖母羊生产并成活到断奶时刻的羔羊繁活率，由于一年中繁殖在前出栏在后，即使第*j*龄母羊出栏，每只第*j*龄存活母羊也能年生产 $PS_j$ 只羔羊。仍以每年的出栏时刻(10—11月)作为年龄阶段的统计界限，母羊从出生成活到第*j*-1龄 (*j* ≥ 3) 出栏时刻的概率是 $\prod_{e=0}^{j-1} S_e$ ，若存活者不出栏，则只有这个比例的母羊于翌年初进行繁殖；因此，若从母羊个体出生开始的整个生命史来看，第*j*龄 (*j* ≥ 3) 母羊个体年生产羔羊的统计数量为 $\left(\prod_{e=0}^{j-1} S_e\right) \cdot PS_j$  (只)，于是，到第*i*龄 (*i* ≥ 3) 出栏的母羊，共繁殖了 $\sum_{j=3}^i \left(\prod_{e=0}^{j-1} S_e\right) \cdot PS_j$ 只羔羊。从而母羊的个体累计净货币收益为

$$NRF_i = \begin{cases} NRM_i ; & \text{当 } i \leq 2 \text{ 时} \\ NRM_i + L_m \sum_{j=3}^i \left(\prod_{e=0}^{j-1} S_e\right) \cdot PS_j ; & \text{当 } i \geq 3 \text{ 时 } (i=0, 1, \dots, 8) \end{cases} \quad (7)$$

## 参 数

模型的参数取自中国科学院海北高寒草甸生态系统定位站地区。由于缺少详细的数据,对于各年龄的繁殖母羊,我们把到断奶时刻的羔羊繁活率统一取为83%,忽略了繁殖母羊年龄差别对羔羊繁活率的影响。因为断奶时羔羊的体重通常达到出栏时刻羔羊体重的75%左右,故取断奶时刻每只存活羔羊的净收益为出栏羔羊净收益的75%;由表2,  $L_m = (29.28 - 9.83) \cdot 0.75 = 14.59$  (元)。其他参数列于表1—2,均为年度值。在表2中,羔羊的皮张价格是指断奶以后的羔羊的皮张,断奶前死亡的羔羊的皮张价格忽略不计。表2的各参数取自本项研究II,这里不再予以详细说明。各种畜产品价格一律以1987年收购价为准。

表1 藏羊存活率

Table 1. Survival rates of Tibetan sheep.

年 龄 Age <i>i</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$S_i$	0.82	0.83	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.96	0.95

表2 收入和支出参数

(单位: 元/只)

Table 2. Parameters of income and cost for a sheep. (Unit: Yuan/sheep)

年 龄 Age <i>i</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8
羊毛收入 Income of wool ( $W_i$ )	0.0	3.12	6.87	7.40	7.69	8.03	8.90	9.54	10.17
羊皮价格 Prices of sheepskins ( $OK_i$ )	9.22	9.22	10.77	12.32	13.93	15.53	15.53	15.53	15.53
存栏成本 Cost of stock ( $COST_i$ )	9.83	14.76	14.98	15.54	15.61	15.69	15.81	15.75	15.69
出栏收入 Income of slaughter ( $CL_i$ )	29.28	34.64	45.90	60.95	75.83	82.01	85.62	79.56	77.89

## 结 果 和 讨 论

以上述参数根据(5) — (7)式计算出的羯羊和母羊的个体累计净货币收益,分别列于表3和表4。

表3表明,在羯羊个体各出栏年龄中,羯羔羊秋季出栏盈利最大(14.28元/只)。其他年龄的羯羊秋季出栏,因逐年累计成本增长的速度高于累计畜产品产值增长的速度,其净收益均低于羯羔羊;其中以4岁羯羊出栏效益最好(11.73元/只)。从表3还可以

表3 羯羊个体累计货币净收益

(单位: 元/只)

Table 3 Accumulative net income for a wether.

(Unit: Yuan/sheep)

年 龄 Age i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
累计羊毛收入 Accumulative income for wool	0.0	2.13	6.62	11.26	15.89	20.53	25.46	30.55	35.70
累计死亡部分皮张收入 Accumulative income for sheep skins of dead part	0.10	1.39	1.68	2.00	2.35	2.72	3.08	3.43	3.76
出栏收入 Income for slaughter	24.01	23.59	29.97	38.22	45.65	47.40	47.52	42.41	39.41
累计总收入 Accumulative total gross income	24.11	27.11	38.27	51.48	63.89	70.65	76.06	76.39	78.87
累计总成本 Accumulative total cost	9.83	21.93	32.13	42.28	52.16	61.61	70.75	79.49	87.85
累计净收入 Accumulative net income	14.28	5.18	6.14	9.20	11.73	9.04	5.31	-3.10	-8.98

表4 母羊个体累计货币净收益

(单位: 元/只)

Table 4 Accumulative net income for a female sheep.

(Unit: Yuan/sheep)

年 龄 Age i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
累计羊毛收入 Accumulative income for wool	0.0	2.13	6.62	11.26	15.89	20.53	25.46	30.55	35.70
累计死亡部分皮张收入 Accumulative income for sheep skins of dead part	0.10	1.39	1.68	2.00	2.35	2.72	3.08	3.43	3.76
出栏收入 Income for slaughter	24.01	23.59	29.97	38.22	45.65	47.40	47.52	42.41	39.41
累计繁殖收入 Accumulative income for reproduction	—	—	—	7.91	15.50	22.79	29.90	36.51	42.96
累计总收入 Accumulative total gross income	24.11	27.11	38.27	59.39	79.39	93.44	105.85	112.79	121.83
累计总成本 Accumulative total cost	9.83	21.93	32.13	42.28	52.16	61.61	70.75	79.49	87.85
累计净收入 Accumulative net income	14.28	5.18	6.14	17.11	27.23	31.83	35.10	33.41	33.98

看出, 个体累计总产值和累计总成本均随年龄递增, 但5岁以上羯羊的总产值增长趋于平缓, 逐渐降至总成本曲线之下。1—4岁羯羊的体重增长较快, 产毛量也随年龄逐步增加, 故其出栏时净收益也是随年龄递增的。5岁以上的羯羊, 体重增长缓慢, 甚至于下降(7岁以上), 尽管累计羊毛产值增长迅速, 但其数额较小, 抵消不了成本的增加, 故其出栏时净收益随年龄递减。若将羯羊饲养至7岁以上出栏, 经营将出现亏损, 并且随年龄递增。综上所述, 就个体而言, 羯羊的最佳出栏年龄是羔羊, 如果欲提高产品结构中羊毛部分的产值, 则应选择效益较好的4岁羯羊出栏。

通过参数分析可以发现,如果1岁羯羊存活个体的出栏收益有较大幅度的增加,即由34.64元/只(表2)增至48.00元/只,相当于活体重达到44.48kg/只,出栏1岁羯羊和出栏羯羔羊的净收益才是相等的;如果4岁羯羊存活个体的出栏收益增加4.24元/只,达到80.07元/只(表2),相当于活重达到65.66kg/只,出栏4岁羯羊可达到出栏羯羔羊的净收益(14.28元/只)。所以,通过补饲等管理措施使4岁羯羊的净收益达到最大,较之1岁羯羊容易。

由于3岁以上的母羊增加了繁殖收益,使得它们的净收益均高于不繁殖的0—2岁母羊(表4)。4—8岁繁殖母羊的个体累计净收益均在30元/只左右,其中以6岁母羊最高,因此,母羊的最佳出栏年龄应为6岁。

对繁殖收益参数的分析表明,如果繁殖羔羊的收益增加较多,即母羊累计繁殖收入高于表4中所列数值较多、随年龄增加较快,那么延续母羊的存活时间,增加繁殖次数,有助于提高母羊的个体净产值,母羊的最佳出栏年龄将向后推移;反之,若繁殖收益减少较多,母羊的存栏收益不足以抵偿成本的消耗,则母羊的最佳出栏年龄将向4岁靠拢。因为不计入繁殖收益时4岁母羊的净收益仅比羔羊低2.55元/只(表3),只要繁殖收益超过1.28元,出栏4岁以下的母羊就不可能带来最大净收益。若再考虑到市场调节作用,母羊出栏年龄的提前可能减少羔羊的数量,从而抬高羔羊的价格,所以,母羊的最佳出栏年龄不大可能出现在4岁以前。

在资源约束和种群平衡约束下,藏羊种群最大畜产品能量输出的出栏方案,是首先出栏6岁母羊,然后出栏部分4岁母羊,羯羔羊全部出栏(本项研究I);以最大净货币收益为目标的种群最优出栏方案,是首先出栏6岁母羊,然后出栏部分5岁母羊,也是羯羔羊全部出栏(本项研究II)。采用个体最大净货币收益目标和相同的参数,通过不同途径获得的上述个体最佳出栏年龄结果表明,局部个体最佳出栏年龄与种群整体最佳出栏年龄大致是相容的,只不过后者在资源的约束下从整体利益出发,除了出栏最佳年龄的母羊外,还出栏部分非最佳年龄的母羊。由于6岁母羊的出栏效益最好,无论从种群还是个体的角度来看,都不应存栏6岁以上的母羊。

在种群优化模式中,虽然没有像个体优化那样明显地出现母羊的繁殖收益,但其已隐含在维持种群平衡和优化结构、从而维持最大收益的总收益之中,关于这一点请参看上述2篇文章的灵敏度分析部分。由于母羊的繁殖功能,母羊的个体最大收益超过了羯羊,也使得母羊在种群中占有特殊的地位,起着一种生产力源泉的作用,因此,无论从个体还是种群的角度探讨家畜的生产性能,都不应忽视母畜的繁殖功能所带来的效益。

### 参 考 文 献

- (3) Cocks, K. D., 1968, Discrete stochastic programming, *Management Science*, 15:72—79.

## STUDIES ON THE OPTIMAL STRUCTURE OF PRODUCTION FOR ALPINE PASTURELANDS

### III. THE OPTIMAL AGE OF SLAUGHTER TO MAXIMIZE THE NET INCOME OF LIVESTOCK PRODUCTS FOR THE INDIVIDUAL OF TIBETAN SHEEP

Zhou Li, Zhao Xinquan and Wang Qiji

(Northwest Plateau Institute of Biology, The Chinese Academy of Sciences)

The problems of Systematical optimization for herd under constraints of limited resource can be solved by linear constrained programming, but the problems of partial optimization for individual, differing from them, usually are problems of optimization without constraints.

A problem that optimizes age of slaughter to maximize individual net income of livestock products for Tibetan sheep can be written as follows:

$$\text{Max } NR(t) = F(t) - G(t); t \geq 0 \quad (1)$$

where,  $NR(t)$  denotes accumulative individual net income until age  $t$  at that it will be slaughtered;  $E(t)$  and  $G(t)$  denote accumulative individual gross income including slaughtering income for livestock products and accumulative individual cost until the age  $t$ , respectively. Their unit is Chinese Yuan;  $t$  denotes time (years) from birth, i.e. age.

Sheep's body weight achieves yearly peak in October to November according to geographic and climatic conditions and growing rhythms of herbage and Tibetan sheep in Qinghai-Tibetan plateau, so slaughtering time has been historically fixed in October to November. As a result, optimizing variable age  $t$ , is dispersed in the expression (1). Considering time giving birth to lambs is fixed as well, and the problem (1) is simply transferred to a discrete optimizing problem:

$$\text{Max } NR(t_i) = F(t_i) - G(t_i) \quad (2)$$

$t_i = i$

$$i = 0, 1, \dots, M$$

where  $m$  denotes the life-span of Tibetan sheep. The problem (2) can be solved by directly searching maximum point of limitary series.

Female sheep, differing from wether, has reproductive function that is one of sources of production, such that additional income of reproduction is increased for female sheep, therefore, optimal ages of slaughter for female sheep and wether are



separately studied.

Data were collected in the neighborhood of Haibei Research Station of Alpine Meadow Ecosystem, Academia Sinica, and mathematical expectations of income and cost were estimated for individual of every sex-age in the expression (2).

Solutions of the problem (2) for female sheep and wether indicate that lambs of wether and female sheep of 6-year old have highest accumulative individual net income, respectively, if they are slaughtered in Autumn. Parameter analysis has been simply done.

**Key words:** Optimum individual slaughter age; Economic probabilistic statistical model; Optimization problem without constraints; Tibetan sheep.